Pesos de Muckenhoupt: algunas propiedades importantes

Fabio M. Berra

CONICET - Facultad de Ingeniería Química (UNL)

1. Introducción y preliminares

En este curso definiremos las clases A_p de pesos de Muckenhoupt y daremos algunas propiedades sobre las mismas. Desde la década de 1970, estas clases adquirieron gran relevancia debido a su estrecha conexión con las propiedades de continuidad en L^p no sólo del operador maximal de Hardy-Littlewood sino también de operadores de Calderón-Zygmund y sus conmutadores, entre otros.

Para comenzar daremos algunas definiciones y notación que serán utilizados a lo largo de estas notas.

- Un *peso* w es una función no negativa y localmente integrable tal que $0 < w(x) < \infty$ para casi todo x en $\mathbb{R}^n$, esto es, permitiremos únicamente que $w(x) = 0$ o $w(x) = \infty$ en conjuntos de medida nula. Si w es un peso y $1/w$ es localmente integrable, entonces $1/w$ también es un peso. Simbolizaremos con L^1_{loc} al conjunto de funciones medibles y localmente integrables en $\mathbb{R}^n$.

- Dados un peso w y un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, utilizaremos la notación $w(E) = \int_E w$.

  Cuando $w = 1$ escribiremos $|E| = \int_E dx$ para denotar a la medida de Lebesgue del conjunto E. Con $\mathcal{X}_E$ denotaremos a la función característica de E.

- Dados $1 < p < \infty$ y un peso w, el espacio $L^p(w)$ es el conjunto

$$L^p(w) = \left\{ f \text{ medible} : \int |f|^p w < \infty \right\},$$

  y $\|f\|_{L^p(w)} = \|fw^{1/p}\|_p$. Con p' denotaremos al exponente conjugado de p, esto es, el número que satisface

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

  Despejando de esta identidad, tenemos que $p' = p/(p-1)$ y además es fácil ver que se cumplen las siguientes igualdades

$$\frac{p'}{p} = p' - 1 \qquad \text{y también} \qquad (p-1)(p'-1) = 1.$$

- Como consecuencia de la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\left(\frac{1}{|E|} \int_E f \right)^p \leq \frac{1}{|E|} \int_E f^p,$$

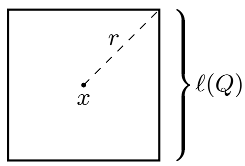
  para todo $p \geq 1$, todo conjunto medible y acotado E y toda f no negativa tal que $f \in L^p(E)$. Este resultado se conoce como *desigualdad de Jensen.*

- El *operador maximal de Hardy-Littlewood* M se define, para $f \in L^1_{\text{loc}}$, como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

  donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q de $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes coordenados que contienen a x.

- Cuando sea necesario escribiremos $Q = Q(x, r)$ para indicar al cubo con centro en x y radio $r > 0$. Es fácil ver que $2r = \sqrt{n}\ell(Q)$, siendo $\ell(Q)$ la longitud de las aristas de Q.



$Q(x, r)$

  Para $\lambda > 0$, λQ denotará al cubo con el mismo centro que Q y $\ell(\lambda Q) = \lambda \ell(Q)$.

- Con $B(x, r)$ denotaremos a la bola euclídea con centro en x y radio r, es decir, $B(x, r) = \{y : |y - x| < r\}$.

Es bien conocido (véase por ejemplo [1] o [2]) que el operador maximal M es de tipo fuerte (p, p) para todo $1 < p < \infty$. Es decir, existe una constante $C = C(p)$ tal que la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx$$

vale para toda $f \in L^p$. Esto significa que M es un operador acotado en L^p. Sin embargo, la desigualdad anterior no es cierta cuando $p = 1$: en efecto, si $f \in L^1$ y no es idénticamente cero, entonces existe $R > 0$ tal que

$$\int_{B(0,R)} |f| \geq c > 0.$$

Por otro lado, si $|x| > r$ entonces $B(0, R) \subseteq B(x, 2|x|)$, y en consecuencia

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|B(x, 2|x|)|} \int_{B(x,2|x|)} |f| \geq \frac{1}{|B(x, 2|x|)|} \int_{B(0,R)} |f| \geq \frac{c|B(0, R)|}{|B(x, 2|x|)|} = \frac{C_n}{|x|^n},$$

que no es integrable.

En cambio, cuando $p = 1$ se prueba (véase también [1] o [2]) que existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx$$

vale para todo $\lambda > 0$, lo cual establece que M es de tipo débil $(1, 1)$.

En la década de 1970, Benjamin Muckenhoupt ([4]) resolvió el problema de caracterizar los pesos w que cumplen la acotación fuerte del operador M

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\, dx \tag{1.1}$$

para $1 < p < \infty$, así como también encontrar los pesos tales que la desigualdad de tipo débil

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)\, dx \tag{1.2}$$

sea cierta para todo $\lambda > 0$. Este trabajo dio origen a las clases de pesos A_p que llevan su nombre.

Desde ese momento, muchos autores se ocuparon en demostrar propiedades de continuidad análogas para diferentes operadores del Análisis Armónico, mostrando que las clases de pesos A_p de Muckenhoupt también garantizaban acotaciones de tipo fuerte y débil para otros operadores.

2. Definición de la clase A_p

Para motivar las definiciones de esta sección, supongamos que w es un peso que satisface alguna de las acotaciones mencionadas para el operador M. Comencemos fijando $1 < p < \infty$ y supongamos que (1.1) vale para toda función $f \in L^p(w)$. Si Q es cualquier cubo de $\mathbb{R}^n$, aplicamos la desigualdad (1.1) con $f\mathcal{X}_Q$, con lo cual

$$w(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|\right)^p \leq \int_Q (M(f\mathcal{X}_Q))^p w \leq \int_{\mathbb{R}^n} (M(f\mathcal{X}_Q))^p w \leq C\int_Q |f|^p w,$$

de donde se sigue que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|\right)^p \leq \frac{C}{w(Q)}\int_Q |f|^p w,$$

para toda $f \in L^p(w)$ y todo cubo Q. Sean $\varepsilon > 0$ y $f = (w+\varepsilon)^{-p'/p}\mathcal{X}_Q$. En este caso, obtenemos

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w+\varepsilon)^{-p'/p}\right)^p \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{w}{(w+\varepsilon)^{p'}}\right)^{-1} \leq C.$$

Dado que $w \leq w+\varepsilon$ y $-p'/p = 1-p'$, esto implica también que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w+\varepsilon)^{-p'/p}\right)^{p-1} \leq C,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Haciendo $\varepsilon \to 0$ y utilizando el teorema de la convergencia monótona, concluimos que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} \leq C. \tag{2.1}$$

Hemos demostrado entonces que la acotación fuerte en $L^p(w)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood (1.1) implica la desigualdad (2.1). De hecho, Muckenhoupt demostró que ambas condiciones son equivalentes.

Dado $1 < p < \infty$, decimos que w pertenece a la *clase A_p de Muckenhoupt* si

$$[w]_{A_p} = \sup_{Q\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} < \infty.$$

La constante $[w]_{A_p}$ recibe el nombre de *constante característica A_p* de w.

Observación 1. La condición A_p también puede ser reescrita en términos de normas L^p como sigue: w está en A_p si existe $C > 0$ tal que la desigualdad

$$|Q|^{-1}\|w^{1/p}\mathcal{X}_Q\|_p\|w^{-1/p}\mathcal{X}_Q\|_{p'} \leq C$$

vale para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$. En este caso, tenemos que $[w]_{A_p} = C^p$.

Para el caso $p = 1$, supongamos que la desigualdad de tipo débil (1.2) vale para toda función $f \in L^1(w)$. Fijado un cubo Q y $0 < \lambda < |Q|^{-1}\int_Q |f|$, es claro que

$$w(Q) \leq w(\{x \in Q : Mf(x) > \lambda\}) \leq w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f|w,$$

con C independiente de λ. Haciendo $\lambda \to |Q|^{-1}\int_Q |f|$ obtenemos

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \leq \frac{C}{w(Q)}\int_{\mathbb{R}^n} |f|w. \tag{2.2}$$

Recordemos que el ínfimo esencial de w sobre un conjunto medible E es

$$\inf_E w = \sup\{b : |\{x \in E : w(x) < b\}| = 0\}$$

y el supremo esencial de w sobre E

$$\sup_E w = \inf\{b : |\{x \in E : w(x) > b\}| = 0\}.$$

Sean $a > \inf_Q w$ y $S_a = \{x \in Q : w(x) < a\}$. Entonces $|S_a| > 0$ y aplicando (2.2) con $f = \mathcal{X}_{S_a}$ tenemos que

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \frac{w(S_a)}{|S_a|} < C\, a,$$

para todo $a > \inf_Q w$ y C independiente de a. Al hacer $a \to \inf_Q w$ obtenemos

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \inf_Q w.$$

Decimos que w pertenece a la *clase A_1 de Muckenhoupt* si

$$[w]_{A_1} = \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\sup_Q w^{-1} \right) < \infty.$$

La constante $[w]_{A_1}$ recibe el nombre de *constante característica A_1* de w.

Observación 2. También podemos escribir la condición A_1 de la siguiente manera: $w \in A_1$ si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$|Q|^{-1} \|w \mathcal{X}_Q\|_1 \|w^{-1} \mathcal{X}_Q\|_\infty \leq C$$

vale para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$. En este caso tenemos que $[w]_{A_1} = C$. La desigualdad de arriba puede verse como el caso $p = 1$ de la mostrada en la Observación 1, ya que $p' = \infty$ cuando $p = 1$.

La siguiente proposición reúne algunas propiedades elementales de las clases A_p.

Proposición 2.1. *Sea w un peso. Entonces valen las siguientes afirmaciones.*

(a) *Si $1 \leq p < q$ entonces $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$. Es decir, $A_p \subset A_q$.*

(b) *Si $p \geq 1$ y $w \in A_p$, entonces $[w]_{A_p} \geq 1$.*

(c) *Si $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ si y solo si $\sigma = w^{1-p'} \in A_{p'}$ y $[\sigma]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{p'-1}$. En particular, $w \in A_2$ si y sólo si $w^{-1} \in A_2$ y $[w]_{A_2} = \left[w^{-1}\right]_{A_2}$.*

(d) *Si $u, v \in A_1$, entonces $w = uv^{1-p} \in A_p$, para todo $1 < p < \infty$.*

(e) *Si $w \in A_p$, entonces la medida $d\mu(x) = w(x)\, dx$ es duplicante: para cada $\lambda > 1$ y todo cubo Q tenemos que*

$$w(\lambda Q) \leq [w]_{A_p} \lambda^{np} w(Q).$$

(f) *$w \in A_1$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que $Mw(x) \leq Cw(x)$ para casi todo punto x.*

Demostración. Comencemos con el ítem (a). Como $-1 = (1 - q')(q - 1)$ para cualquier $q > 1$, observemos que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\sup_Q w^{-1} \right) \geq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-q'} \right)^{q-1}.$$

Por lo tanto, si $w \in A_1$

$$\infty > [w]_{A_1} = \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\sup_Q w^{-1} \right) \geq \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-q'} \right)^{q-1} = [w]_{A_q}$$

Esto nos dice que $A_1 \subseteq A_q$ y $[w]_{A_1} \geq [w]_{A_q}$.

Si $1<p<q$, entonces por la desigualdad de Jensen es claro que para todo cubo Q

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-q'}\right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1}.$$

En consecuencia, si $w\in A_p$

$$\infty > [w]_{A_p} = \sup_{Q\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} \geq \sup_{Q\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-q'}\right)^{q-1} = [w]_{A_q},$$

es decir, $w\in A_q$ y $[w]_{A_q}\leq [w]_{A_p}$.

Para demostrar el ítem (b), notemos que si $1<p<\infty$ entonces aplicando la desigualdad de Hölder

$$1=\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1/p}w^{-1/p} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{1/p'}.$$

Elevando ambos miembros de la desigualdad al exponente p obtenemos

$$1\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1},$$

de donde se sigue la afirmación. El caso $p=1$ se obtiene al observar que

$$1=\frac{1}{|Q|}\int_Q ww^{-1} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\sup_Q w^{-1}\right).$$

La prueba de (c) es consecuencia de la siguiente igualdad

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma^{1-p}\right)^{p'-1} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{p'-1} = \left[\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\right]^{p'-1},$$

ya que $(1-p)(1-p')=1$. De aquí se sigue también que $[\sigma]_{A_{p'}}=[w]_{A_p}^{p'-1}$.

Probemos ahora el ítem (d). Si u y v están en A_1, entonces para cualquier cubo Q

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q uv^{1-p}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (uv^{1-p})^{1-p'}\right)^{p-1} &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q uv^{1-p}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u^{1-p'}v\right)^{p-1}\\
&\leq \left(\inf_Q v\right)^{1-p}\frac{u(Q)}{|Q|}\left(\inf_Q u\right)^{-1}\left(\frac{v(Q)}{|Q|}\right)^{p-1}\\
&\leq [u]_{A_1}[v]_{A_1}^{p-1},
\end{aligned}$$

ya que $u\geq \inf_Q u$ y $v\geq \inf_Q v$ en casi todo punto de Q. Tomando supremo sobre todos los cubos de $\mathbb{R}^n$, obtenemos que $uv^{1-p}\in A_p$ y además $[uv^{1-p}]_{A_p}\leq [u]_{A_1}[v]_{A_1}^{p-1}$.

Para probar el ítem (e) basta considerar el caso $p>1$, ya que si $w\in A_1$ entonces $w\in A_p$ para todo $1<p<\infty$ en virtud del ítem (a). Fijado $\lambda>1$, combinando el hecho de que $w\in A_p$ junto con el ítem (b), para cualquier cubo Q tenemos que

$$\begin{aligned}
w(\lambda Q) &= |\lambda Q|^p\frac{w(\lambda Q)}{|\lambda Q|}\left(\frac{w^{1-p'}(\lambda Q)}{|\lambda Q|}\right)^{p-1}\left(w^{1-p'}(\lambda Q)\right)^{1-p}\\
&\leq [w]_{A_p}\lambda^{np}|Q|^p\left(w^{1-p'}(Q)\right)^{1-p}\\
&\leq [w]_{A_p}\lambda^{np}w(Q).
\end{aligned}$$

Para finalizar, demostremos (f). Si $w\in A_1$, entonces la desigualdad

$$\frac{w(Q)}{|Q|}\leq [w]_{A_1}w(x) \tag{2.3}$$

vale para todo cubo Q y casi todo x en Q. Fijemos x tal que $Mw(x) > [w]_{A_1} w(x)$. Entonces existe un cubo Q_x con vértices racionales que contiene a x y tal que

$$\frac{w(Q_x)}{|Q_x|} > [w]_{A_1} w(x).$$

En virtud de (2.3), x debe estar en un subconjunto de Q_x de medida nula. Luego $\{x : Mw(x) > [w]_{A_1} w(x)\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$, siendo N_j conjuntos medibles de medida cero. Por lo tanto, $Mw(x) \leq [w]_{A_1} w(x)$ en casi todo punto x.

Recíprocamente, si $Mw(x) \leq Cw(x)$ en casi todo punto x, entonces vale (2.3) con $[w]_{A_1}$ reemplazada por C y para casi todo punto de Q, que es equivalente a que

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \inf_Q w. \qquad \square$$

La notación $A \approx B$ indica que las cantidades A y B son equivalentes, es decir, que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1 B \leq A \leq C_2 B.$$

Dado que en $\mathbb{R}^n$ tenemos la siguiente relación

$$B(x,r) \subseteq Q(x, \sqrt{n} r) \subseteq B(x, \sqrt{n} r)$$

para todo x y todo $r > 0$, y además

$$|B(x,r)| \approx |Q(x, \sqrt{n} r)| \approx |B(x, \sqrt{n} r)| \approx r^n$$

podemos utilizar bolas en lugar de cubos en la definición de las clases A_p.

Trabajar con promedios sobre bolas será especialmente útil para mostrar que los pesos de tipo potencia $w(x) = |x|^a$ están en A_p bajo cierta relación entre a y p.

Proposición 2.2. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ y $w(x) = |x|^a$. Entonces $w \in A_p$ si y sólo si $-n < a < n(p-1)$. Además, $w \in A_1$ si y sólo si $-n < a \leq 0$.*

Demostración. Fijemos $1 < p < \infty$ y $-n < a < n(p-1)$. Vamos a dividir las bolas de $\mathbb{R}^n$ en dos conjuntos

$$\mathcal{B}_1 = \{B(x_B, r) : |x_B| \leq 3r\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{B(x_B, r) : |x_B| > 3r\}.$$

Si $B \in \mathcal{B}_1$, entonces $B \subseteq B_0$ siendo $B_0 = B(0, 4r)$. En efecto, si $y \in B$ entonces

$$|y| \leq |y - x_B| + |x_B| < r + 3r = 4r$$

y también $4^n |B| = |B_0|$. Transformando a coordenadas polares y utilizando que $a + n$ y $a(1-p') + n$ son números positivos obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1} &\leq \left(\frac{4^n}{|B_0|}\int_{B_0} |x|^a\,dx\right)\left(\frac{4^n}{|B_0|}\int_{B_0} |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1} \\
&\leq \frac{C}{r^{np}}\left(\int_0^{4r} \rho^{a+n-1}\,d\rho\right)\left(\int_0^{4r} \rho^{a(1-p')+n-1}\,d\rho\right)^{p-1} \\
&\leq \frac{C}{r^{np}} \frac{(4r)^{a+n}}{a+n}\left(\frac{(4r)^{a(1-p')+n}}{a(1-p')+n}\right)^{p-1} \\
&\leq \frac{C}{r^{np}} r^{a+n+a(1-p')(p-1)+n(p-1)}
\end{aligned}$$

$$= C_1.$$

Si $B \in \mathcal{B}_2$, entonces $|x| \approx |x_B|$. En efecto, para todo $x \in B$ tenemos que

$$|x_B| - r \leq |x| \leq |x_B| + r$$

lo cual implica que

$$\frac{2}{3}|x_B| \leq |x| \leq \frac{4}{3}|x_B|.$$

En este caso, simplemente escribimos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1} &\leq C|x_B|^a|x_B|^{a(1-p')(p-1)}\\ &= C|x_B|^{a-a}\\ &= C_2,\end{aligned}$$

dado que $(1-p')(p-1) = -1$. Tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$ obtenemos que

$$\sup_{B\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1} \leq C,$$

lo que prueba que $w \in A_p$.

Supongamos ahora que $w(x) = |x|^a$ está en A_p, para $1 < p < \infty$. Entonces para toda bola B de $\mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1} \leq [w]_{A_p}. \tag{2.4}$$

Para cada $B = B(0,r)$ y $\varepsilon > 0$ obtenemos

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{|B\backslash B(0,\varepsilon)|}{|B|}\right)^{p-1} r^{-a} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_{B\backslash B(0,\varepsilon)} |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1} \leq [w]_{A_p}$$

cuando $a \geq 0$, y también

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{|B\backslash B(0,\varepsilon)|}{|B|}\right)^{p-1} \varepsilon^{-a} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_{B\backslash B(0,\varepsilon)} |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1} \leq [w]_{A_p}$$

si $a < 0$. Esto implica que

$$\int_B |x|^a\,dx < \infty, \tag{2.5}$$

lo que permite concluir que $a > -n$. Combinando (2.4) con (2.5) tenemos que

$$\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx < \infty,$$

de donde se deduce que $a(1-p') > -n$ o, equivalentemente, que $a < n(p-1)$.

Para terminar, veamos el caso $p = 1$. Supongamos que $-n < a \leq 0$. Si $B = B(x_B, r)$ es una bola en $\mathcal{B}_1$ entonces $B \subseteq B_0$, donde $B_0 = B(0, 4r)$. Entonces

$$\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx \leq \frac{4^n}{|B_0|}\int_{B_0} |x|^a\,dx = \frac{C}{r^n}r^{a+n} = Cr^a = C\inf_{B_0}|x|^a \leq C_1\inf_B |x|^a,$$

dado que $|x|^a$ es radialmente decreciente y $B \subseteq B_0$.

Si $B \in \mathcal{B}_2$, entonces $|x| \approx |x_B|$ y en consecuencia

$$\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx \leq C|x_B|^a = C_2\inf_B |x|^a.$$

Eligiendo nuevamente $C = \max\{C_1, C_2\}$ tenemos que

$$\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx \leq C \inf_B |x|^a,$$

para toda bola $B \subseteq \mathbb{R}^n$. En consecuencia, $w \in A_1$.

Recíprocamente, si $w \in A_1$ entonces para cualquier bola de $\mathbb{R}^n$ se cumple

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\sup_B |x|^{-a} \leq [w]_{A_1}. \tag{2.6}$$

En particular, si $B = B(0,r)$ y $z \in B$, $z \neq 0$ tenemos que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)|z|^{-a} \leq [w]_{A_1}.$$

Esto nos permite deducir que la integral $\displaystyle\int_B |x|^a\,dx$ debe ser finita, con lo que $a > -n$. Volviendo a (2.6) también debemos tener que $\sup_B |x|^{-a} < \infty$ para toda bola $B = B(0,r)$. Esto indica que $a \leq 0$ y el resultado queda probado. $\square$

Al comienzo vimos que $w \in A_p$ es una condición necesaria para la acotación fuerte en $L^p(w)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood que aparece en (1.1). El siguiente teorema, debido a Benjamin Muckenhoupt, establece que esta condición es también suficiente.

Teorema 2.3. *Sea $1 < p < \infty$. Entonces $M\colon L^p(w) \to L^p(w)$, es decir, existe una constante positiva $C = C(n,p)$ tal que la desigualdad*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)\,dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx$$

vale para toda $f \in L^p(w)$ si y sólo si $w \in A_p$.

Este teorema será de utilidad para demostrar una importante propiedad de factorización que cumplen los pesos de A_p. Si bien en el curso esta demostración se omite, el lector interesado puede encontrar una prueba en, por ejemplo, [1] o [2].

3. Desigualdad de Hölder al revés y sus consecuencias

Si $1 < s < \infty$ decimos que w satisface una desigualdad de Hölder al revés o *reverse Hölder* de exponente s si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\right)^{1/s} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)$$

vale para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$. En este caso escribimos $w \in \mathrm{RH}_s$ y denotamos

$$[w]_{\mathrm{RH}_s} = \sup_{Q\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\right)^{1/s}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{-1}$$

El nombre “Hölder al revés” o “reverse Hölder” proviene del hecho de que la desigualdad opuesta es una simple consecuencia de la desigualdad de Hölder. En efecto

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w \leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q w^s\right)^{1/s}|Q|^{1/s'} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\right)^{1/s}.$$

Decimos que $w \in \mathrm{RH}_\infty$ si existe $C > 0$ tal que la desigualdad

$$\sup_Q w \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)$$

vale para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$. Si $w \in \mathrm{RH}_\infty$ denotamos

$$[w]_{\mathrm{RH}_\infty} = \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \left[\left(\sup_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right)^{-1} \right].$$

Lema 3.1. *Las clases reverse Hölder son decrecientes. Es decir,*

$$\mathrm{RH}_\infty \subseteq \mathrm{RH}_s \subseteq \mathrm{RH}_t$$

para todo $1 < t < s$.

Demostración. Si $w \in \mathrm{RH}_\infty$, para cualquier $s > 1$ tenemos que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^s \right)^{1/s} \leq \sup_Q w \leq [w]_{\mathrm{RH}_\infty} \frac{1}{|Q|} \int_Q w,$$

con lo que $w \in \mathrm{RH}_s$ y $[w]_{\mathrm{RH}_s} \leq [w]_{\mathrm{RH}_\infty}$.

Si $1 < t < s$ y $w \in \mathrm{RH}_s$, aplicando la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^t \right)^{1/t} \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^s \right)^{1/s} \leq [w]_{\mathrm{RH}_s} \frac{1}{|Q|} \int_Q w,$$

por lo que $w \in \mathrm{RH}_t$ y $[w]_{\mathrm{RH}_t} \leq [w]_{\mathrm{RH}_s}$. □

A continuación veremos que todos los pesos de Muckenhoupt verifican una desigualdad de Hölder al revés. Este hecho permite demostrar una importante característica de las clases A_p, conocida como propiedad de apertura: si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$ entonces existe $1 < q < p$ tal que $w \in A_q$.

Comenzaremos con una propiedad auxiliar que servirá para estos propósitos.

Lema 3.2. *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $w \in A_p$. *Para cada número* $0 < \alpha < 1$ *existe* $0 < \beta < 1$ *de modo que para cada cubo* Q *y cada subconjunto medible* $S \subseteq Q$ *que verifique* $|S| \leq \alpha |Q|$ *se tiene que* $w(S) \leq \beta w(Q)$.

Demostración. En virtud del ítem (a) de la Proposición 2.1 bastará considerar el caso $1 < p < \infty$. Notemos primero que si f es tal que $|f|^p w$ es localmente integrable, entonces

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \right)^p &\leq \frac{1}{|Q|^p} \left(\int_Q |f|^p w \right) \left(\int_Q w^{1-p'} \right)^{p-1} \\
&\leq \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f|^p w \right) \frac{w(Q)}{|Q|} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{p-1} \\
&\leq [w]_{A_p} \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f|^p w \right).
\end{aligned}$$

Fijado $0 < \alpha < 1$, un cubo Q y $S \subseteq Q$ medible tal que $|S| \leq \alpha |Q|$, eligiendo $f = \mathcal{X}_{Q \setminus S}$ en la expresión anterior obtenemos

$$\left(\frac{|Q \setminus S|}{|Q|} \right)^p \leq [w]_{A_p} \frac{w(Q \setminus S)}{w(Q)}$$

o equivalentemente

$$\left(1 - \frac{|S|}{|Q|} \right)^p \leq [w]_{A_p} \left(1 - \frac{w(S)}{w(Q)} \right).$$

Dado que $|S| \leq \alpha |Q|$, la desigualdad anterior implica que

$$\frac{(1-\alpha)^p}{[w]_{A_p}} \leq 1 - \frac{w(S)}{w(Q)}$$

y en consecuencia

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq 1 - \frac{(1-\alpha)^p}{[w]_{A_p}}.$$

Eligiendo $\beta = 1 - \frac{(1-\alpha)^p}{[w]_{A_p}}$ obtenemos la tesis. □

Teorema 3.3 (Propiedad de reverse Hölder para pesos A_p)**.** *Sean $1 \le p < \infty$ y $w \in A_p$. Entonces existen constantes positivas C y γ que dependen sólo de n, p y $[w]_{A_p}$ tales que la desigualdad*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\gamma}\right)^{1/(1+\gamma)} \le \frac{C}{|Q|}\int_Q w$$

vale para todo cubo Q, es decir, $w \in \mathrm{RH}_{1+\gamma}$.

Demostración. Fijemos $0 < \alpha < 1$ y un cubo Q de $\mathbb{R}^n$. Definimos una sucesión creciente de números positivos $\{\alpha_k\}_{k\ge 0}$ de la siguiente manera

$$\alpha_0 = \frac{w(Q)}{|Q|} \quad \text{y} \quad \alpha_k = \left(\frac{2^n}{\alpha}\right)^k \alpha_0, \quad \text{para } k \ge 1.$$

Observemos que $\alpha_{k+1} = (2^n/\alpha)\alpha_k$ y para cada $k \ge 0$

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \le \alpha_k.$$

Para cada $k \ge 0$ realizaremos el siguiente proceso: subdividimos el cubo Q en 2^n subcubos obtenidos de partir cada lado de Q a la mitad. A continuación seleccionamos aquellos cubos R que verifican

$$\frac{w(R)}{|R|} > \alpha_k \tag{3.1}$$

y los no seleccionados se vuelven a subdividir en 2^n subcubos cuyos lados miden la mitad del lado del cubo que los genera. El proceso se repite indefinidamente, obteniendo así una colección $\{Q_{k,j}\}_j$ de cubos con las siguientes propiedades:

(a) $\alpha_k < \dfrac{1}{|Q_{k,j}|}\displaystyle\int_{Q_{k,j}} w \le 2^n\alpha_k$

(b) $w(x) \le \alpha_k$ para casi todo $x \notin \bigcup_j Q_{k,j}$

(c) cada cubo $Q_{k+1,j}$ está contenido en un cubo $Q_{k,\ell}$, para algún $\ell = \ell(j)$

Para ver (a) observemos que si $Q_{k,j}$ fue seleccionado, entonces el cubo R de lado doble que lo contiene no lo fue. Por lo tanto

$$\alpha_k < \frac{1}{|Q_{k,j}|}\int_{Q_{k,j}} w \le \frac{|R|}{|Q_{k,j}|}\frac{1}{|R|}\int_R w \le 2^n\alpha_k.$$

Para probar (b) notemos que si $x \notin \bigcup_j Q_{k,j}$ entonces existe una sucesión $\{Q_m\}$ de cubos anidados no seleccionados de manera que la intersección de sus clausuras es $\{x\}$. Es decir, para todo $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\frac{w(Q_m)}{|Q_m|} \le \alpha_k.$$

Como w es localmente integrable, el teorema de diferenciación de Lebesgue nos permite concluir que $w(x) \le \alpha_k$ en casi todo punto tomando el límite para $m \to \infty$.
Por último, $Q_{k+1,j}$ satisface que

$$\frac{w(Q_{k+1,j})}{|Q_{k+1,j}|} > \alpha_{k+1} > \alpha_k,$$

es decir que cumple con (3.1). Como los cubos seleccionados del nivel k son maximales (en el sentido de la inclusión) entonces $Q_{k+1,j}$ debe estar contenido en alguno de ellos.

Para cada $k \ge 0$ definimos $\Omega_k = \bigcup_j Q_{k,j}$. Observemos que

$$2^n\alpha_k \ge \frac{1}{|Q_{k,\ell}|}\int_{Q_{k,\ell}} w$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{|Q_{k,\ell}|}\int_{Q_{k,\ell}\cap\Omega_{k+1}} w\\
&= \sum_{j:Q_{k+1,j}\subseteq Q_{k,\ell}} \frac{|Q_{k+1,j}|}{|Q_{k,\ell}|}\frac{w(Q_{k+1,j})}{|Q_{k+1,j}|}\\
&> \alpha_{k+1}\frac{|Q_{k,\ell}\cap\Omega_{k+1}|}{|Q_{k,\ell}|}.
\end{aligned}
$$

Esto implica que

$$
\frac{|Q_{k,\ell}\cap\Omega_{k+1}|}{|Q_{k,\ell}|} \leq \frac{2^n\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = \alpha.
$$

Utilizando el Lema 3.2, tenemos que existe $0<\beta<1$ de manera que $w(Q_{k,\ell}\cap\Omega_{k+1}) \leq \beta w(Q_{k,\ell})$. Sumando en ℓ, obtenemos que

$$
w(\Omega_{k+1}) \leq \beta w(\Omega_k) \quad \text{y también} \quad w(\Omega_{k+1}) \leq \beta^{k+1} w(\Omega_0).
$$

Además $|\Omega_{k+1}| \leq \alpha|\Omega_k| \leq \alpha^{k+1}|\Omega_0|$, con lo cual $|\Omega_k| \to 0$ cuando $k\to\infty$.

Ahora procedemos a estimar la integral de $w^{1+\gamma}$ sobre Q, donde $\gamma>0$ será elegido adecuadamente. Notemos que

$$
\begin{aligned}
\int_Q w^{1+\gamma} &= \int_{Q\setminus\Omega_0} w^{1+\gamma} + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k+1}} w^{1+\gamma}\\
&\leq \alpha_0^\gamma w(Q\setminus\Omega_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1}^\gamma w(\Omega_k)\\
&\leq \alpha_0^\gamma w(Q) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1}^\gamma \beta^k w(\Omega_0)\\
&\leq \alpha_0^\gamma w(Q) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{\alpha}\right)^{(k+1)\gamma} \alpha_0^\gamma\, \beta^k w(Q)\\
&= \alpha_0^\gamma w(Q)\left(1+\left(\frac{2^n}{\alpha}\right)^\gamma \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n\gamma}\beta}{\alpha^\gamma}\right)^k\right).
\end{aligned}
$$

Elegimos γ de modo tal que

$$
0<\gamma<\frac{-\log\beta}{\log 2^n - \log\alpha},
$$

con lo cual

$$
\frac{2^{n\gamma}\beta}{\alpha^\gamma} < 1
$$

y en consecuencia

$$
\left(\frac{2^n}{\alpha}\right)^\gamma \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n\gamma}\beta}{\alpha^\gamma}\right)^k = \frac{2^{n\gamma}}{\alpha^\gamma - 2^{n\gamma}\beta}.
$$

Por lo tanto,

$$
\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\gamma} \leq \left(1+\frac{2^{n\gamma}}{\alpha^\gamma - 2^{n\gamma}\beta}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{1+\gamma}.
$$

Elevando ambos miembros al exponente $1/(1+\gamma)$ obtenemos la tesis. □

Observación 3. La elección explícita de β en el Lema 3.2 nos permite dar una cota concreta de γ: si $0<\alpha<1$ y $w\in A_p$, entonces $w\in \mathrm{RH}_{1+\gamma}$ para cualquier γ que verifique

$$
0<\gamma<\frac{\log([w]_{A_p}) - \log([w]_{A_p} - (1-\alpha)^p)}{\log 2^n - \log\alpha}.
$$

La constante característica resulta

$$
[w]_{\mathrm{RH}_{1+\gamma}} = \left(1+\frac{\left(\frac{2^n}{\alpha}\right)^\gamma}{1-\left(\frac{2^n}{\alpha}\right)^\gamma\left(1-\frac{(1-\alpha)^p}{[w]_{A_p}}\right)}\right)^{1/(1+\gamma)}.
$$

Como consecuencia del Teorema 3.3 tenemos los siguientes resultados.

Teorema 3.4. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$. Entonces existe $\gamma > 0$ (que depende de $[w]_{A_p}$, n y p) tal que $w^{1+\gamma} \in A_p$.*

Demostración. Consideremos primero el caso $p = 1$. Por el Teorema 3.3 existe $\gamma > 0$ tal que $w \in \mathrm{RH}_{1+\gamma}$. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\gamma} \leq [w]_{\mathrm{RH}_{1+\gamma}}^{1+\gamma}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{1+\gamma} &\leq [w]_{\mathrm{RH}_{1+\gamma}}^{1+\gamma}\left([w]_{A_1}\operatorname*{ínf}_Q w\right)^{1+\gamma} \\ &= [w]_{\mathrm{RH}_{1+\gamma}}^{1+\gamma}[w]_{A_1}^{1+\gamma}\operatorname*{ínf}_Q w^{1+\gamma}, \end{aligned}$$

lo que muestra que $w^{1+\gamma} \in A_1$ y además $\left[w^{1+\gamma}\right]_{A_1} \leq [w]_{\mathrm{RH}_{1+\gamma}}^{1+\gamma}[w]_{A_1}^{1+\gamma}$.

Si $1 < p < \infty$, por el inciso (c) de la Proposición 2.1 tenemos que $w^{1-p'} \in A_{p'}$. Usando el Teorema 3.3 podemos concluir que existen γ_1 y γ_2 tales que $w \in \mathrm{RH}_{1+\gamma_1}$ y $w^{1-p'} \in \mathrm{RH}_{1+\gamma_2}$. Sea $\gamma = \mathrm{mín}\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Entonces tanto w como $w^{1-p'}$ pertenecen a la clase $\mathrm{RH}_{1+\gamma}$ en virtud del Lema 3.1. De esta manera,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\gamma}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{(1+\gamma)(1-p')}\right)^{p-1} &\leq \left([w]_{\mathrm{RH}_{1+\gamma}}\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{1+\gamma}\left(\left[w^{1-p'}\right]_{\mathrm{RH}_{1+\gamma}}\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{(p-1)(1+\gamma)} \\ &\leq \left([w]_{\mathrm{RH}_{1+\gamma}}\left[w^{1-p'}\right]_{\mathrm{RH}_{1+\gamma}}^{p-1}[w]_{A_p}\right)^{1+\gamma}, \end{aligned}$$

lo que nos da la prueba deseada. □

El teorema anterior permite deducir la propiedad de apertura para pesos A_p.

Corolario 3.5 (Apertura de la clase A_p)**.** *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, entonces existe $1 < q < p$ tal que $w \in A_q$. En otras palabras, para $1 < p < \infty$ tenemos que*

$$A_p = \bigcup_{1<q<p} A_q.$$

Demostración. Sea $w \in A_p$. En virtud del Teorema 3.4 existe $\gamma > 0$ tal que $w^{1+\gamma} \in A_p$. Sea $q = 1 + (p-1)/(1+\gamma)$. Entonces $1 < q < p$ y utilizando la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-q'}\right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\gamma}\right)^{1/(1+\gamma)}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{(1+\gamma)(1-p')}\right)^{(p-1)/(1+\gamma)} \leq \left[w^{1+\gamma}\right]_{A_p}^{1/(1+\gamma)},$$

lo que muestra que $w \in A_q$. □

4. Factorización de pesos A_p

En la Proposición 2.1 hemos visto que si u y v son pesos en la clase A_1 entonces el producto uv^{1-p} es un peso de A_p. En realidad, todo peso de A_p puede factorizarse como un producto de dos factores que involucra a pesos de la clase A_1. Este importante resultado fue probado por Peter Jones en [3].

Teorema 4.1. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$. Entonces existen pesos $u, v \in A_1$ tales que $w = uv^{1-p}$.*

Demostración. Observemos primero que el caso $p = 1$ es trivial puesto que si $w \in A_1$ podemos elegir $u = w$ y $v = 1$ para obtener $w = uv^{1-p}$.

Supongamos ahora que $p \geq 2$ y definimos el operador

$$Tf = \left(w^{-1/p}M\left(f^{p-1}w^{1/p}\right)\right)^{1/(p-1)} + w^{1/p}M\left(fw^{-1/p}\right)$$

para $f \in L^p$, siendo M el operador maximal de Hardy-Littlewood. Observemos entonces que T está bien definido y es acotado en L^p. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^p &\leq 2^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[M\left(f^{p-1} w^{1/p} \right) \right]^{p/(p-1)} w^{-1/(p-1)} + \int_{\mathbb{R}^n} \left[M\left(f w^{-1/p} \right) \right]^p w \right) \\
&= 2^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[M\left(f^{p-1} w^{1/p} \right) \right]^{p'} w^{1-p'} + \int_{\mathbb{R}^n} \left[M\left(f w^{-1/p} \right) \right]^p w \right) \\
&\leq 2^p \left(C_1(w,p) \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(p-1)p'} w^{p'/p} w^{1-p'} + C_2(w,p) \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w^{-1} w \right) \\
&= 2^p \left(C_1(w,p) + C_2(w,p) \right) \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p,
\end{aligned}$$

ya que M está acotado en $L^p(w)$ y en $L^{p'}(w^{1-p'})$ en virtud del Teorema 2.3. Si $C_0 = 2(C_1(w,p)+C_2(w,p))^{1/p}$ entonces hemos probado que

$$\|Tf\|_p \leq C_0 \|f\|_p. \tag{4.1}$$

Veamos que T satisface las siguientes propiedades

1. $T(f+g) \leq Tf + Tg$, para $f, g \geq 0$ en L^p.
2. $T(\lambda f) = \lambda Tf$, para $\lambda \geq 0$.

En efecto, probemos (1). Será suficiente con probar que

$$M\left((f+g)^{p-1} w^{1/p} \right)^{1/(p-1)} \leq M\left(f^{p-1} w^{1/p} \right)^{1/(p-1)} + M\left(g^{p-1} w^{1/p} \right)^{1/(p-1)}.$$

Fijemos x y sea Q un cubo que contiene a x. Como supusimos $p \geq 2$ tenemos que $p-1 \geq 1$ y en consecuencia, por la desigualdad triangular para la norma en L^p obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (f+g)^{p-1} w^{1/p} \right)^{1/(p-1)} &= \frac{1}{|Q|^{1/(p-1)}} \left\| (f+g) w^{\frac{1}{p(p-1)}} \mathcal{X}_Q \right\|_{p-1} \\
&\leq \frac{1}{|Q|^{1/(p-1)}} \left\| f w^{\frac{1}{p(p-1)}} \mathcal{X}_Q \right\|_{p-1} + \frac{1}{|Q|^{1/(p-1)}} \left\| g w^{\frac{1}{p(p-1)}} \mathcal{X}_Q \right\|_{p-1} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f^{p-1} w^{1/p} \right)^{1/(p-1)} + \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q g^{p-1} w^{1/p} \right)^{1/(p-1)} \\
&\leq \left[M\left(f^{p-1} w^{1/p} \right)(x) \right]^{1/(p-1)} + \left[M\left(g^{p-1} w^{1/p} \right)(x) \right]^{1/(p-1)}.
\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todos los cubos Q que contienen a x obtenemos

$$\left[M\left((f+g)^{p-1} w^{1/p} \right)(x) \right]^{1/(p-1)} \leq \left[M\left(f^{p-1} w^{1/p} \right)(x) \right]^{1/(p-1)} + \left[M\left(g^{p-1} w^{1/p} \right)(x) \right]^{1/(p-1)},$$

tal como queríamos. Combinando esta estimación con la sublinealidad de M podemos concluir la prueba de (1).

El punto (2) es consecuencia directa de la correspondiente propiedad para el operador M, es decir, de que

$$M(\lambda f)(x) = \lambda M f(x)$$

para todo λ.

Fijemos ahora $f_0 \in L^p$ tal que $\|f_0\|_p = 1$. Definimos la función $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{T^j f_0}{(2C_0)^j}$. Esta serie es absolutamente convergente en L^p: dado $N \in \mathbb{N}$, por (4.1) podemos escribir

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} \frac{T^j f_0}{(2C_0)^j} \right\|_p \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{\|T^j f_0\|_p}{(2C_0)^j} \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{\|f_0\|_p}{2^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1.$$

Tomando límite para $N \to \infty$ y usando el teorema de la convergencia monótona obtenemos que $\|\varphi\|_p \leq 1$.

A continuación definimos $u = w^{1/p}\varphi^{p-1}$ y $v = w^{-1/p}\varphi$. De esta manera, es claro que $uv^{1-p} = w$. Para terminar, probaremos que efectivamente u y v son pesos en la clase A_1. Utilizando (1) y (2) tenemos que

$$T\varphi = T\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{T^j f_0}{(2C_0)^j}\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{T^{j+1} f_0}{(2C_0)^j} = 2C_0\left(\varphi - \frac{Tf_0}{2C_0}\right) \leq 2C_0\varphi.$$

Por la definición de T tenemos que

$$\left(w^{-1/p}M(\varphi^{p-1}w^{1/p})\right)^{\frac{1}{p-1}} + w^{1/p}M(\varphi w^{-1/p}) \leq 2C_0\varphi. \tag{4.2}$$

Dado que $\varphi = (uw^{-1/p})^{1/(p-1)}$, de la desigualdad anterior deducimos que

$$\left(w^{-1/p}Mu\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq 2C_0(uw^{-1/p})^{\frac{1}{p-1}}$$

o de forma equivalente

$$Mu \leq (2C_0)^{p-1}u,$$

con lo que $u \in A_1$ en virtud del ítem (f) de la Proposición 2.1.

Por otra parte, como $\varphi = w^{1/p}v$ de (4.2) también obtenemos que

$$Mv \leq 2C_0 v,$$

de modo que también $v \in A_1$, como queríamos demostrar. Esto concluye el caso $p \geq 2$.

Si $1 < p < 2$ y $w \in A_p$, entonces por el ítem (c) de la Proposición 2.1 tenemos que $w^{1-p'} \in A_{p'}$. En este caso es fácil ver que $p' > 2$. Aplicando lo probado anteriormente, obtenemos que existen pesos u y v en A_1 tales que $w^{1-p'} = uv^{1-p'}$. Elevando ambos miembros al exponente $1-p$ obtenemos que $w = vu^{1-p}$, lo que da la factorización deseada para w. $\square$

5. La condición A_∞

Definimos la clase de pesos A_∞ como la unión de todas las clases A_p, es decir

$$A_\infty = \bigcup_{p\geq 1} A_p.$$

El siguiente resultado, que es una generalización del Teorema 3.3 e involucra una medida duplicante μ, será de utilidad para establecer una caracterización de los pesos en la clase A_∞. La demostración sigue líneas muy similares a la del Teorema 3.3 y se incluye en el Apéndice para el lector interesado.

Teorema 5.1. *Sean w un peso y μ una medida definida en $\mathbb{R}^n$ que satisface las siguientes condiciones*

1. *μ es duplicante, es decir, existe una constante $C_d > 0$ tal que la desigualdad*

$$\mu(2Q) \leq C_d\mu(Q)$$

   vale para todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$.

2. *Existen constantes $0 < \alpha, \beta < 1$ de modo que*

$$\mu(S) \leq \alpha\mu(Q) \Longrightarrow \int_S w\, d\mu \leq \beta \int_Q w\, d\mu$$

   para cada cubo Q y cada subconjunto medible $S \subseteq Q$.

Entonces existen constantes positivas C y γ (que dependen sólo de n, C_d, α y β) de modo que

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w^{1+\gamma}\, d\mu\right)^{1/(1+\gamma)} \leq \frac{C}{\mu(Q)}\int_Q w\, d\mu.$$

Es decir, w satisface una desigualdad de tipo reverse Hölder con exponente $1+\gamma$ respecto de la medida μ.

En el siguiente teorema presentamos varias formas de caracterizar los pesos en A_∞.

Teorema 5.2. *Sea w un peso. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $w \in A_\infty$.

(b) *Existen constantes $0 < \alpha, \beta < 1$ tales que para todo cubo Q y todo subconjunto medible $A \subseteq Q$ se tiene que*

$$|A| \leq \alpha|Q| \Longrightarrow w(A) \leq \beta w(Q).$$

(c) *Existe un número $\gamma > 0$ tal que $w \in \mathrm{RH}_{1+\gamma}$.*

(d) *Existen constantes positivas C y δ tales que para cada cubo Q y cada subconjunto medible A de Q tenemos que*

$$\frac{w(A)}{w(Q)} \leq C\left(\frac{|A|}{|Q|}\right)^\delta.$$

(e) *Existen constantes $0 < \alpha', \beta' < 1$ tales que la desigualdad*

$$w(A) \leq \alpha' w(Q) \Longrightarrow |A| \leq \beta'|Q|$$

se cumple para todo cubo Q y todo subconjunto medible $A \subseteq Q$.

Demostración. Notemos que (a) implica (b) es inmediato por la definición de A_∞ y el Lema 3.2. La demostración de que (b) implica (c) se sigue del argumento realizado en el Teorema 3.3.

Veamos que (c) implica (d). Fijemos un cubo Q y $A \subseteq Q$ medible. Por hipótesis, $w \in \mathrm{RH}_s$ con $s = 1+\gamma$. Usando la desigualdad de Hölder podemos escribir

$$w(A) \leq \left(\int_A w^s\right)^{1/s} |A|^{1/s'} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\right)^{1/s} |A|^{1/s'}|Q|^{1/s} \leq [w]_{\mathrm{RH}_s} w(Q)\left(\frac{|A|}{|Q|}\right)^{1/s'},$$

lo que nos da (d) con $C = [w]_{\mathrm{RH}_s}$ y $\delta = 1/s'$.

Para ver que (d) implica (e) elegimos una constante $0 < \theta < 1$ suficientemente pequeña como para que $C\theta^\delta < 1$. Fijamos un cubo Q y $A \subseteq Q$ medible tal que $|Q\backslash A| < \theta|Q|$. La hipótesis implica entonces que $w(Q\backslash A) < C\theta^\delta w(Q)$. Es decir, hemos demostrado que si $|A| > (1-\theta)|Q|$ entonces $w(A) > (1 - C\theta^\delta)w(Q)$ o, equivalentemente, que

$$w(A) \leq (1 - C\theta^\delta)w(Q) \quad \text{implica que} \quad |A| \leq (1-\theta)|Q|.$$

Esto prueba (e) tomando $\alpha' = 1 - C\theta^\delta$ y $\beta' = 1-\theta$.

Finalmente, veamos que (e) implica (a). Será suficiente probar que $w \in A_p$ para algún $1 \leq p < \infty$. Sea μ la medida definida por $d\mu(x) = w(x)\,dx$. Entonces la hipótesis establece que existen constantes $0 < \alpha', \beta' < 1$ tales que para todo cubo Q y todo subconjunto medible $A \subseteq Q$

$$\mu(A) \leq \alpha'\mu(Q) \Longrightarrow \int_A w^{-1}\, d\mu \leq \beta' \int_Q w^{-1}\, d\mu.$$

Esta medida μ resulta ser duplicante (en virtud del Lema 6.1, ver Apéndice) y por lo tanto podemos aplicar el Teorema 5.1 para concluir que existen constantes $C, \gamma > 0$ tales que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w^{-1-\gamma} \, d\mu \right)^{1/(1+\gamma)} \leq \frac{C}{\mu(Q)} \int_Q w^{-1} \, d\mu$$

o, equivalentemente,

$$\left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q w^{-\gamma} \right)^{1/(1+\gamma)} \leq C \frac{|Q|}{w(Q)}.$$

Eligiendo $p = 1 + 1/\gamma$ la desigualdad anterior puede reescribirse como

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \left(\frac{|Q|}{w(Q)} \right)^{1/p'} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{1/p'} \leq C$$

o también

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{p-1} \leq C^p,$$

lo que nos permite concluir que $w \in A_p$ y, en consecuencia, $w \in A_\infty$. $\square$

6. Apéndice

En esta sección incluimos algunas demostraciones que se omitieron en los apartados anteriores.

Lema 6.1. *Sea μ una medida con la siguiente propiedad: existen constantes $0 < \alpha, \beta < 1$ de modo que para todo cubo Q y todo subconjunto medible $A \subseteq Q$ tenemos que*

$$|A| \leq \alpha |Q| \Longrightarrow \mu(A) \leq \beta \mu(Q).$$

Entonces la medida es duplicante, esto es, existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$\mu(2Q) \leq C\mu(Q)$$

se cumple para todo cubo Q.

Demostración. Fijemos $\lambda = (1+\alpha/2)^{1/n}$ y un cubo Q. Veamos primero que $|\lambda Q \backslash Q| < \alpha |Q|$. En efecto, observemos que

$$|\lambda Q \backslash Q| = (\lambda^n - 1)|Q| = \frac{\alpha}{2}|Q| < \alpha |Q|$$

por cómo hemos elegido λ. Luego escribimos

$$\lambda Q = \bigcup_{k=1}^{c_n} R_k,$$

donde c_n es una constante dimensional y los R_k son cubos que resultan de trasladar al cubo Q y, por lo tanto, $|R_k| = |Q|$, para cada k. Notemos que

$$|(\lambda Q \backslash Q) \cap R_k| \leq |\lambda Q \backslash Q| < \alpha |Q| = \alpha |R_k|.$$

Por hipótesis y dado que $R_k \subseteq Q \cup ((\lambda Q \backslash Q) \cap R_k)$, podemos concluir que

$$\mu((\lambda Q \backslash Q) \cap R_k) \leq \beta \mu(R_k) \leq \beta(\mu(Q) + \mu((\lambda Q \backslash Q) \cap R_k)),$$

de donde se sigue que

$$\mu((\lambda Q \backslash Q) \cap R_k) \leq \frac{\beta}{1-\beta}\mu(Q)$$

para cada $1 \leq k \leq c_n$. De esta manera,

$$\mu(\lambda Q \backslash Q) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{c_n} (\lambda Q \backslash Q) \cap R_k\right) \leq \sum_{k=1}^{c_n} \mu((\lambda Q \backslash Q) \cap R_k) \leq \frac{c_n \beta}{1-\beta}\mu(Q).$$

Es decir, dado $\lambda = (1+\alpha/2)^{1/n}$ existe $C_0 = c_n\beta/(1-\beta)$ tal que la desigualdad

$$\mu(\lambda Q \backslash Q) \leq C_0 \mu(Q) \tag{6.1}$$

vale para todo cubo Q.

Para finalizar, notemos que existe un único $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^{k_0} < 2 \leq \lambda^{k_0+1}$. Entonces usando (6.1) procedemos como sigue

$$\begin{aligned}
\mu(2Q) \leq \mu(\lambda^{k_0+1}Q) &\leq \mu(Q) + \sum_{k=0}^{k_0} \mu(\lambda^{k+1}Q \backslash \lambda^k Q) \\
&\leq \mu(Q) + \sum_{k=0}^{k_0} C_0(C_0+1)^k \mu(Q)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu(Q)\left(1 + C_0 \frac{(C_0+1)^{k_0+1}-1}{C_0}\right) \\
&= (C_0+1)^{k_0+1}\mu(Q),
\end{aligned}
$$

lo que nos da la tesis. □

Demostración del Teorema 5.1. Fijemos $0 < \alpha < 1$ y un cubo Q de $\mathbb{R}^n$. Definimos una sucesión creciente de números positivos $\{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ de la siguiente manera

$$
\alpha_0 = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w\, d\mu \quad \text{y} \quad \alpha_k = \left(\frac{C_d^2}{\alpha}\right)^k \alpha_0, \quad \text{para } k \geq 1,
$$

siendo C_d la constante de duplicación de μ que aparece en (1). Observemos que $\alpha_{k+1} = (C_d^2/\alpha)\alpha_k$ y para cada $k \geq 0$

$$
\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w\, d\mu \leq \alpha_k.
$$

Para cada $k \geq 0$ realizaremos el siguiente procedimiento: subdividimos el cubo Q en 2^n subcubos obtenidos de partir cada lado de Q a la mitad. A continuación seleccionamos aquellos cubos R que verifican

$$
\frac{1}{\mu(R)} \int_R w\, d\mu > \alpha_k \tag{6.2}
$$

y los no seleccionados vuelven a subdividirse en 2^n subcubos, de modo que los cubos resultantes tienen la mitad del lado del cubo que los genera. El proceso se repite indefinidamente, obteniendo así una colección $\{Q_{k,j}\}_j$ de cubos con las siguientes propiedades:

(a) $\alpha_k < \dfrac{1}{\mu(Q_{k,j})} \displaystyle\int_{Q_{k,j}} w\, d\mu \leq C_d^2 \alpha_k$

(b) $w(x) \leq \alpha_k$ para casi todo $x \notin \bigcup_j Q_{k,j}$ (con respecto a μ)

(c) cada cubo $Q_{k+1,j}$ está contenido en un cubo $Q_{k,\ell}$, para algún ℓ

Veamos primero que vale (a): si $Q_{k,j}$ fue seleccionado, entonces el cubo R de lado doble que lo contiene no lo fue. En este caso tenemos que $R \subseteq 3Q_{k,j}$ y utilizando la propiedad (1) de μ obtenemos

$$
\mu(R) \leq \mu(3Q_{k,j}) \leq \mu(4Q_{k,j}) \leq C_d \mu(2Q_{k,j}) \leq C_d^2 \mu(Q_{k,j}).
$$

Por lo tanto

$$
\alpha_k < \frac{1}{\mu(Q_{k,j})} \int_{Q_{k,j}} w\, d\mu \leq \frac{\mu(R)}{\mu(Q_{k,j})} \frac{1}{\mu(R)} \int_R w\, d\mu \leq C_d^2 \alpha_k.
$$

El ítem (b) es consecuencia de una versión del teorema de diferenciación de Lebesgue para medidas duplicantes. Por último, $Q_{k+1,j}$ satisface que

$$
\frac{1}{\mu(Q_{k+1,j})} \int_{Q_{k+1,j}} w\, d\mu > \alpha_{k+1} > \alpha_k,
$$

es decir que cumple con (6.2). Como los cubos seleccionados del nivel k son maximales (en el sentido de la inclusión) entonces $Q_{k+1,j}$ debe estar contenido en alguno de ellos.

Para cada $k \geq 0$ definimos $\Omega_k = \bigcup_j Q_{k,j}$. Observemos que

$$
\begin{aligned}
C_d^2 \alpha_k &\geq \frac{1}{\mu(Q_{k,\ell})} \int_{Q_{k,\ell}} w\, d\mu \\
&\geq \frac{1}{\mu(Q_{k,\ell})} \int_{Q_{k,\ell} \cap \Omega_{k+1}} w\, d\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j:Q_{k+1,j}\subseteq Q_{k,\ell}} \frac{\mu(Q_{k+1,j})}{\mu(Q_{k,\ell})} \frac{1}{\mu(Q_{k+1,j})} \int_{Q_{k+1,j}} w\,d\mu \\
&> \alpha_{k+1} \frac{\mu(Q_{k,\ell}\cap\Omega_{k+1})}{\mu(Q_{k,\ell})}.
\end{aligned}
$$

Esto implica que

$$\frac{\mu(Q_{k,\ell}\cap\Omega_{k+1})}{\mu(Q_{k,\ell})} \le \frac{C_d^2\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = \alpha.$$

Utilizando la propiedad (2) de μ tenemos que

$$\int_{Q_{k,\ell}\cap\Omega_{k+1}} w\,d\mu \le \beta \int_{Q_{k,\ell}} w\,d\mu.$$

Sumando en ℓ, obtenemos que

$$\int_{\Omega_{k+1}} w\,d\mu \le \beta \int_{\Omega_k} w\,d\mu \quad \text{y también} \quad \int_{\Omega_{k+1}} w\,d\mu \le \beta^{k+1} \int_{\Omega_0} w\,d\mu.$$

Además $\mu(\Omega_{k+1}) \le \alpha\mu(\Omega_k) \le \alpha^{k+1}\mu(\Omega_0)$, con lo cual $\mu(\Omega_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Ahora procedemos a estimar la integral de $w^{1+\gamma}$ respecto de μ sobre Q, donde $\gamma > 0$ será elegido adecuadamente.

$$
\begin{aligned}
\int_Q w^{1+\gamma}\,d\mu &= \int_{Q\setminus\Omega_0} w^{1+\gamma}\,d\mu + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k+1}} w^{1+\gamma}\,d\mu \\
&\le \alpha_0^\gamma \int_{Q\setminus\Omega_0} w\,d\mu + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1}^\gamma \int_{\Omega_k} w\,d\mu \\
&\le \alpha_0^\gamma \int_Q w\,d\mu + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1}^\gamma \beta^k \int_{\Omega_0} w\,d\mu \\
&\le \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C_d^2}{\alpha}\right)^{\gamma(k+1)} \beta^k\right) \alpha_0^\gamma \int_Q w\,d\mu \\
&= \left(1 + \frac{C_d^{2\gamma}}{\alpha^\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C_d^{2\gamma}\beta}{\alpha^\gamma}\right)^k\right) \alpha_0^\gamma \int_Q w\,d\mu.
\end{aligned}
$$

Elegimos γ de modo tal que

$$0 < \gamma < \frac{-\log\beta}{\log C_d^2 - \log\alpha},$$

con lo cual

$$\frac{C_d^{2\gamma}\beta}{\alpha^\gamma} < 1$$

y en consecuencia

$$\frac{C_d^{2\gamma}}{\alpha^\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C_d^{2\gamma}\beta}{\alpha^\gamma}\right)^k = \frac{C_d^{2\gamma}}{\alpha^\gamma} \frac{1}{1 - \frac{C_d^{2\gamma}\beta}{\alpha^\gamma}} = \frac{C_d^{2\gamma}}{\alpha^\gamma - C_d^{2\gamma}\beta}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w^{1+\gamma}\,d\mu \le \left(1 + \frac{C_d^{2\gamma}}{\alpha^\gamma - C_d^{2\gamma}\beta}\right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w\,d\mu\right)^{1+\gamma}.$$

Elevando ambos miembros al exponente $1/(1+\gamma)$ obtenemos la tesis. □

Referencias

[1] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[2] L. Grafakos, *Classical and modern Fourier analysis*, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004. MR 2449250

[3] P. W. Jones, *Factorization of A_p weights*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, 511–530.

[4] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226. MR 0293384